

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

7 februarie 2026

Clasa a VII-a

Barem de notare

Subiectul 1

a) Calculați media aritmetică a numerelor a și b dacă:

$$a = \frac{\sqrt{4\sqrt{81} + \sqrt{2\sqrt{1024}}}}{5} \text{ și } b = 1\frac{1}{3}\sqrt{0,09} + 2\frac{1}{7}\sqrt{0,0196} - \frac{1}{2}.$$

b) Fie $a = (2026 - \frac{1014}{\sqrt{1+3+5+\dots+2027}})^{2025} : 2025$. Să se arate ca numărul a este pătrat perfect.

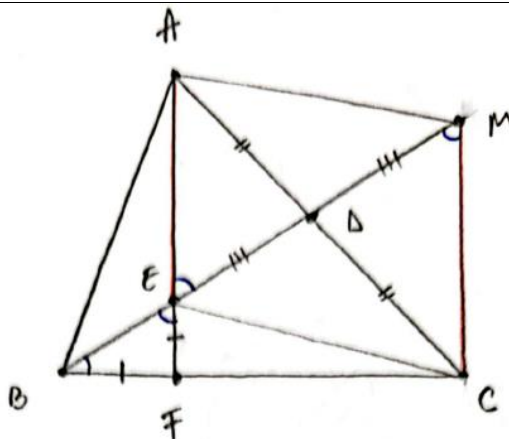
Soluție:

a)	$a = \frac{14}{5}$	3p
	$b = \frac{1}{5}$	3p
	$m_a = \frac{3}{2}$	3p
b)	$\sqrt{1+3+5+\dots+2027} = \sqrt{\left[\frac{2027+1}{2}\right]^2}$	3p
	$a = (2026 - \frac{1014}{1014})^{2025} : 2025$	3p
	$a = 2025^{2025} : 2025$	3p
	$a = 2025^{2024} \Rightarrow a = (2025^{1012})^2 = \text{pătrat perfect}$	3p
	Total	21p

Subiectul 2

În triunghiul $\triangle ABC$ se ia punctul F pe latura BC , D mijlocul laturii AC , $AF \cap BD = \{E\}$ și M simetricul punctului E față de D . Știind că $FE \equiv FB$, arătați că $AE \equiv BC$.

Soluție:



M simetricul punctului E față de D $\Rightarrow ED \equiv DM$	3p
Din $AD \equiv DC$ și $ED \equiv DM \Rightarrow AECM$ – paralelogram $\Rightarrow AE \equiv MC$ și $AE \parallel MC$	3p
$AE \parallel MC$ și EM secantă $\Rightarrow \angle AEM \equiv \angle EMC$ (alterne interne)	3p
Din $\triangle BFE$ cu $BF \equiv FE \Rightarrow \angle FBE \equiv \angle FEB$	3p
$\angle FBE \equiv \angle FEB \equiv \angle AEM \equiv \angle CMB$	3p
$\triangle BMC$: $\angle CBM \equiv \angle CMB \Rightarrow \triangle BMC$ -isoscel, $BC \equiv MC$	3p
$AE \equiv MC$ și $MC \equiv BC \Rightarrow AE \equiv BC$	3p
Total	21p

Subiectul 3

Demonstrați că $1 + \frac{\sqrt{2}}{2^2} + \frac{\sqrt{3}}{3^2} + \frac{\sqrt{4}}{4^2} + \frac{\sqrt{5}}{5^2} + \dots + \frac{\sqrt{2025}}{2025^2} > \frac{2025}{1013}$.

G.M.

Soluție:

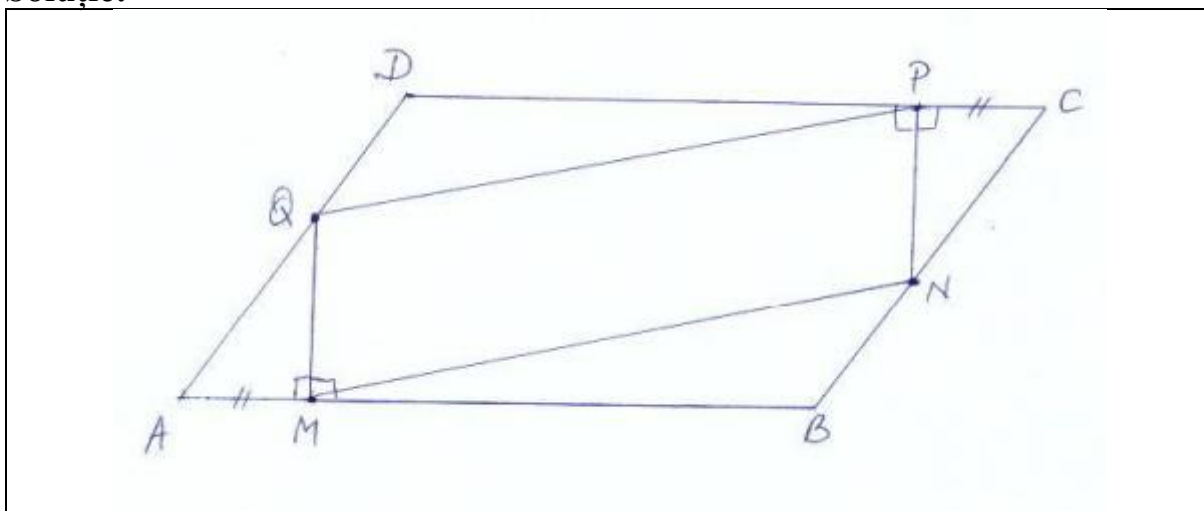
Observă că poate folosi inegalitatea mediilor: $m_g > m_h \Leftrightarrow \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$, dacă $a \neq b$	3p
<p>Scrie explicit (sau într-o formă echivalentă) relațiile de mai jos:</p> $\sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 2} > \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1+2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2^2} > \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$ $\sqrt{3} = \sqrt{1 \cdot 3} > \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{1+3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3^2} > \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$ <p>.....</p> $\sqrt{2025} = \sqrt{1 \cdot 2025} > \frac{2 \cdot 1 \cdot 2025}{1+2025} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2025}{2026} \Rightarrow \frac{\sqrt{2025}}{2025^2} > \frac{2 \cdot 1}{2025 \cdot 2026} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right)$	10p
<p>Adunând toate relațiile obținute mai sus se obține:</p> $1 + \frac{\sqrt{2}}{2^2} + \frac{\sqrt{3}}{3^2} + \frac{\sqrt{4}}{4^2} + \frac{\sqrt{5}}{5^2} + \dots + \frac{\sqrt{2025}}{2025^2} > 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2026}\right)$	4p
$1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2026}\right) = 1 + \frac{2024}{2026} = \frac{4050}{2026} = \frac{2025}{1013}$	4p
Total	21p

Subiectul 4

Fie ABCD paralelogram, punctul M aparține laturii AB, punctul P aparține laturii CD astfel încât $AM \equiv CP$ și MP nu este perpendiculară pe AB. În punctele M și P se construiesc perpendicularele QM și NP pe AB, respectiv pe CD, astfel încât $QEAD$ și $NEBC$.

- a) Arătați că patrulaterul MNPQ este paralelogram;
b) Arătați că dreptele AC, MP și NQ sunt concurente.

Soluție:



a)	Demonstrează că $\triangle AMQ \equiv \triangle CPN \Rightarrow MQ \equiv PN$	3p
	Demonstrează că $MQ \parallel NP$	3p
	Din $MQ \equiv PN$ și $MQ \parallel NP \Rightarrow MNPQ$ paralelogram	3p
b)	$MNPQ$ – paralelogram, $MP \cap NQ = \{O'\} \Rightarrow O'$ este mijlocul lui MP O' este mijlocul lui NQ	4p
	$AMCP$ – paralelogram, $MP \cap AC = \{O\} \Rightarrow O$ este mijlocul lui MP O este mijlocul lui AC	5p
	Din O' mijlocul lui MP și O mijlocul lui MP $\Rightarrow O' = O$	1p
	Deci dreptele MP, NQ și AC sunt concurente	2p
Total		21p